
ÉTUDE

SUR LA

Charge des Condensateurs

EXPOSÉE PAR

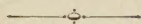
Romain de WYBRANOWSKI

de Wojciechów (Pologne)

ÉTUDE

SUR LA

Charge des Condensateurs



DISSERTATION INAUGURALE

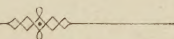
DE LA

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE FRIBOURG EN SUISSE

EXPOSÉE PAR

Romain de WYBRANOWSKI

de Wojciechów (Pologne)



FRIBOURG

IMPRIMERIE DE SAINT-PAUL

—
1904



Digitized by the Internet Archive
in 2026

Ce travail a été exécuté dans les années 1902-1904, sous la bienveillante direction de M. le Professeur Dr J. de Kowalski et dans son laboratoire.

Qu'il me soit permis d'exprimer à mon très honoré Professeur mes remerciements les plus sincères pour son aide et l'intérêt tout spécial qu'il m'a toujours témoigné au cours de mes expériences.

Je remercie bien sincèrement par la même occasion M. J. Moscicki, ancien assistant du laboratoire de physique, pour les précieux conseils qu'il m'a donnés et particulièrement pour la direction qu'il m'a apportée dans mes travaux pratiques au laboratoire.

INTRODUCTION

Dans le domaine pratique de l'électricité, la question des décharges oscillantes a pris dans ces temps derniers une particulière importance.

Il suffit, en effet, de jeter un coup d'œil sur le nombre considérable de travaux tout récents qui ont été publiés pour se rendre compte que cette question préoccupe beaucoup le monde savant. De ces études multiples sont sorties forcément, en vertu même de la nature compliquée des phénomènes oscillatoires, un grand nombre de méthodes permettant de les étudier avec plus ou moins de précision.

En général, on peut dire que les méthodes actuelles sont loin d'être parfaites : les unes, étant plus ou moins compliquées, présentent en outre le défaut de donner des résultats peu précis ; les autres, par contre, tout en donnant un degré suffisant d'exactitude ¹, exigent des appareils coûteux, et par conséquent elles ne sont pas à la portée de tout le monde.

Nous nous sommes proposé dans ce travail d'attirer l'attention sur un instrument déjà ancien — le pendule de Helmholtz — et de démontrer que cet ins-

¹ *La méthode de Dolezalek : Annal. d. Physik v. Drude.*
V. 12, p. 1142, 1903.

trument donne le moyen d'exécuter toute une série d'expériences d'une manière à la fois simple et très précise. — L'exécution de ces expériences ne présente pas non plus de difficultés, puisqu'on dispose en général dans tous les laboratoires de physique des appareils auxiliaires de cet instrument.



Interrupteur à pendule de Helmholtz.

L'idée de l'interrupteur à pendule est due à Helmholtz ¹, qui a fait construire en 1851 un appareil permettant d'interrompre et de fermer des circuits dérivés, dans des intervalles de temps très rapprochés. Ce premier appareil de Helmholtz était une balançoire électrique. Schiller s'est ensuite servi pour ses recherches d'un appareil déjà perfectionné, dont on trouve la description dans les Annales de Poggendorf ². — L'interrupteur à pendule actuel, construit et perfectionné par M. Edelmann, diffère seulement par des détails de l'interrupteur employé par Schiller ³.

Helmholtz se servait de son appareil pour des expériences physiologiques. La méthode et les résultats de ses travaux, ainsi que la description de l'appareil même, furent publiés également dans les Annales de Poggendorf, en 1851 ⁴ : « Über die Dauer und den Verlauf der durch Stromesschwankungen inducierten elektrischen Ströme. »

Helmholtz utilisa dans ses expériences l'idée de Pouillet, en l'appliquant à sa balançoire électrique, qui permettait de calculer un intervalle de temps infiniment petit. — A l'aide de son appareil, Helmholtz a pu obtenir, entre les interruptions et les fermetures successives, les intervalles de temps égaux à $1/400$ sec.

¹ *Annal. d. Physik. Poggendorf.* V. 83, p. 505.

² *Poggendorf Annalen.* V. 152, p. 535, 1874.

³ *Loc. cit.*

⁴ *Loc. cit.*

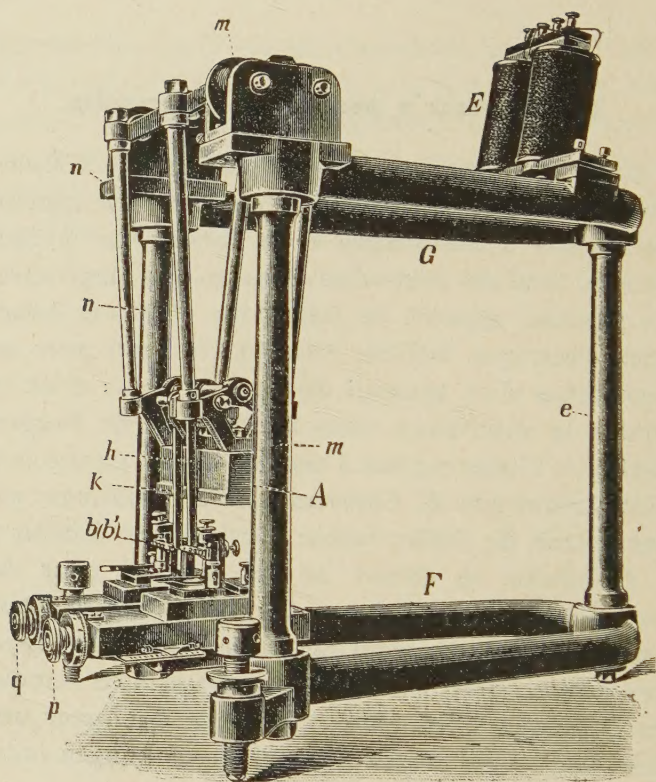


Fig. 1.

Description de l'interrupteur à pendule de Helmholtz.

La description du pendule actuel a été faite par son constructeur Th. Edelmann ¹.

Le cliché ci-joint représente l'ensemble de l'ap-

¹ *Annal. de Pys. v. Drude. V. 3, p. 274, 1900.*

pareil, tandis que le croquis reproduit les détails importants, dont nous donnons l'explication.

La carcasse de l'appareil est constituée par deux fortes barres métalliques **G**, **F**, courbées symétriquement en **U** et réunies entre elles par trois colonnes métalliques **m**, **n**, **e**. Entre les deux barres **G**, **F**, oscille un prisme lourd en fer doux **A**, portant sur le devant deux loquets **h**, **k**. Le prisme **A** est monté sur un trapèze composé de quatre colonnes métalliques reliées entre elles et monté sur un axe cylindrique, qui repose sur quatre galets de friction.

Sur la fig. 1, on ne voit qu'un seul de ces galets.

A l'aide de l'électroaimant **E**, on maintient le prisme **A** dans sa plus haute position; le courant électrique étant interrompu dans les bobines de l'électroaimant, le prisme **A** commence aussitôt à osciller et frappe en descendant avec ses deux loquets **h**, **k** les deux leviers de contact, ce qui interrompt le courant dans les circuits dérivés.

Il faut remarquer que les deux loquets **h**, **k** sont fixés d'une manière mobile sur le devant du prisme **A**, de telle sorte qu'au retour du prisme, ils peuvent être déviés, ce qui élimine toute chance de rupture des petits leviers.

La différence de temps entre les interruptions du courant, provoquées par les ouvertures successives des deux leviers de contact, est réglée à l'aide de vis micrométriques **p**, **q**. — Ces deux vis mettent en mouvement les deux curseurs sur lesquels les contacts sont montés et permettent par conséquent de

déplacer ces derniers parallèlement dans le sens longitudinal.

Le croquis N^o 2 donne le schéma des parties destinées à interrompre le courant.

Les loquets agissent sur les leviers de contacts de la manière suivante :

Le loquet **k**, par exemple, arrivant dans la direction indiquée par la flèche, frappe contre la pointe **a** du levier **b** et projette ce dernier en avant. — Pour préserver les sur-

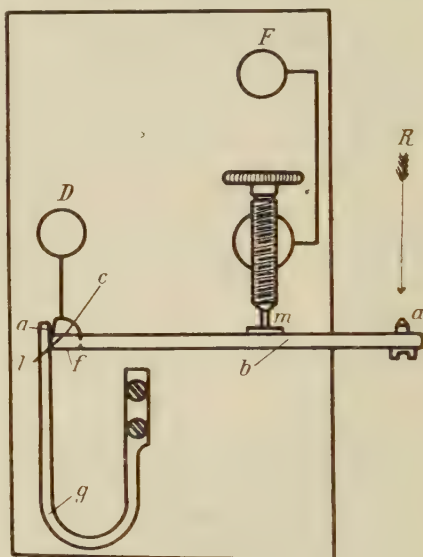


Fig. 2.

faces de loquets contre l'usure, due aux chocs très répétés, les parties où le choc se produit sont protégées par des plaquettes en agate. — Les deux surfaces du levier **d** et **f** font entre elles un angle plus petit que 90° pour fixer l'arête de contact.

Le ressort **g** appuie contre l'angle **l**, formé par les deux surfaces **d**, **f**, d'où il résulte que le levier **b** est assez fortement serré contre la vis de contact **m**. Le levier **b**, après avoir été frappé par le loquet **k**, reste dévié de 90° , position pour laquelle le ressort **g**

repose sur la surface **f**. Il est à remarquer que le levier **b** et le ressort **g**, avec les surfaces **f**, **d**, ne sont pas situés dans le même plan horizontal ; le levier **b** passe au-dessus du ressort **g**. — Le contact **m** est relié électriquement à la vis d'arrêt **F** et l'axe **c** avec **D**.

Le second loquet **b'** est la reproduction exacte mais simplement inverse du premier, absolument symétrique par rapport au côté droit de la figure 2.

N.-B. — Au lieu d'interrupteur, on peut monter sur les curseurs **p**, **q** un appareil de fermeture.

L'application de l'interrupteur à pendule de Helmholtz est très variée : elle comprend les mesures des oscillations électriques à grande fréquence (les décharges alternatives de condensateurs), la détermination du coefficient de self-induction, la comparaison des capacités, la détermination de la période de décharges alternatives, etc. La manière de se servir de l'interrupteur à pendule et les méthodes correspondant aux différentes recherches, sont indiquées par Heydweiller dans son manuel des mesures électriques.

Dans l'emploi même de l'interrupteur à pendule, la question importante est celle de connaître d'une manière tout à fait précise l'intervalle de temps, qui sépare les ouvertures successives des deux leviers, ou ce qui revient au même, l'interruption des deux pointes de contacts **m**, **m'** (V. croquis 2).

Parmi plusieurs méthodes pour le calcul de cet intervalle de temps, nous en avons choisi trois, qui méritent surtout d'être signalées. — Nous allons les étudier et les discuter d'une manière précise.

I. — Méthode directe.

Cette méthode permet de calculer l'intervalle de temps, correspondant à une position donnée de vis de contacts, d'après les constantes du pendule même. La méthode directe a été employée surtout par Messieurs U. Seiler ¹ et F. Stössel ². — Nous nous proposons de développer une théorie détaillée de cette méthode, que nous avons employée au calcul de constantes, qui correspondent à notre instrument.

Soit **S**, la distance des deux points de contacts **m**, **m'**, mesurée dans le sens du mouvement du prisme.

Pour la mesurer, on laisse prendre au prisme **A**, abandonné à lui-même, sa position d'équilibre. En agissant sur l'une des vis **p** ou **q**, on amène ensuite un levier en contact avec un des loquets.

Appelons « angle d'amplitude » l'angle compris entre la position d'arrêt, dans laquelle le prisme est retenu par l'électroaimant, et la position d'équilibre où les loquets sont dans le plan d'un des leviers.

Désignons cet angle par ϕ .

Soit φ_1 l'angle formé par les distances des deux contacts, situés à une distance **S**, au centre d'oscillation du pendule.

Soit t_1 le temps dans lequel le pendule parcourt

¹ *Wied. Annal.*, v. 61, p. 32.

² *Inaug. Dissert.* Zürich, 1885.

l'angle φ_1 , l la longueur du pendule des pointes de contacts au centre d'oscillation.

Nous avons d'abord $\mathbf{S} = l \mathbf{t} g \varphi_1$ que nous pouvons écrire :

$$(1) \quad \frac{S}{l} = \mathbf{t} g \varphi_1$$

Le mouvement du pendule est donné par l'équation générale

$$(2) \quad M \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -mg\lambda \sin \varphi$$

où $\mathbf{M}$ représente le moment d'inertie du pendule par rapport à l'axe de rotation, mg le poids du pendule, λ la distance entre le centre de gravité et l'axe de rotation.

Dans le cas où le pendule se trouve dans son élongation maximum Φ , $\mathbf{t}$ étant $= \mathbf{o}$, nous aurons :

$$(3) \quad \mathbf{t} = - \sqrt{\frac{M}{mg\lambda}} \int_{\Phi}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{2 (\cos \varphi - \cos \Phi)}}$$

En faisant $\sin^2 \varphi/2 = \sin^2 \Phi/2 \sin^2 \psi$

$$(4) \quad \mathbf{t}_1 = \sqrt{\frac{M}{mg\lambda}} \int_0^{\psi} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \sin^2 \Phi/2 \sin^2 \psi}}$$

c'est-à-dire une intégrale elliptique du premier ordre.

Nous déduisons de l'équation (4) la valeur de la durée simple d'oscillation du pendule.

$$T = 2 \sqrt{\frac{M}{mg\lambda}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \sin^2 \Phi/2 \sin^2 \psi}}$$

En employant la formule généralement admise dans la théorie des fonctions elliptiques, nous pouvons écrire

$$(5) \quad T = 2k \sqrt{\frac{M}{mg\lambda}}$$

On peut calculer la valeur de K d'après l'équation suivante :

$$(6) \quad 2k = \frac{\pi}{\cos^2 \Phi_1 \cos^2 \Phi_{1/4} \cos^2 \Phi_2 \dots}$$

ou les angles $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3 \dots$

sont déterminés successivement par

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}^2 \Phi_{1/4} &= \sin \Phi_{1/2} \\ \operatorname{tg}^2 \Phi_{1/4} &= \sin \Phi_{2/2} \\ \operatorname{tg}^2 \Phi_{2/4} &= \sin \Phi_{3/2} \\ \dots &\dots \\ \dots &\dots \end{aligned}$$

Dans le cas où les oscillations observées ont une amplitude très petite, le dénominateur de l'équation (6) devient très faible, et de cette manière nous obtenons, pour la durée simple d'une oscillation,

$$(6') \quad T' = \pi \sqrt{\frac{M}{mg\lambda}}$$

Nous déduisons de l'équation (4), comme valeur de t_1 ,

$$(7) \quad t_1 = \sqrt{\frac{M}{mg\lambda}} \int_0^{\psi} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \sin^2 \Phi_{1/2} \sin^2 \psi}}$$

Les mesures effectuées au cathétomètre nous ont donné :

$$\begin{aligned}\Phi &= 78^{\circ}52'28'' \\ l &= 386,3 \text{ millim.}\end{aligned}$$

S correspondant à un tour entier de la vis :

$$\mathbf{S} = 0.4682 \text{ millim.}$$

d'où

$$t_1 = 0.0001590 \text{ secondes.}$$

II. — Méthode de Pouillet.

Pouillet ¹ a démontré qu'il est possible de mesurer un intervalle de temps très petit, comme celui mis par une balle qui parcourt le canon d'un fusil, en appliquant les équations suivantes :

Soit q la quantité d'électricité qui traverse un galvanomètre ballistique. — Cette quantité q est fournie par un courant constant d'intensité i_0 , dont le circuit a été fermé pendant un temps Θ très court par rapport à la période d'oscillation de l'aiguille du galvanomètre.

Soit ω l'angle d'impulsion — correction de l'amortissement étant faite — dû au passage de la quantité q dans le galvanomètre, enfin soit δ la déviation réduite provoquée par le courant constant d'intensité i_0 .

Nous arrivons alors à l'équation

$$(1) \quad i = i_0 \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right)$$

ou i représente l'intensité du courant variable dans le circuit du galvanomètre, dont la résistance ohmique est R et self-induction L . Nous en déduisons :

$$(2) \quad q = \int_0^{\Theta} i dt = i_0 \left[\Theta - \frac{L}{R} \left(1 - e^{-\frac{R\Theta}{L}} \right) \right]$$

¹ Pouillet, *C. R. de l'Acad. des Sciences*, Vol. XIX, p. 1384.

Si la constante du temps $\frac{R \Theta}{L}$ est très grande, nous pouvons écrire d'une manière très approchée :

$$(3) \quad \theta = \frac{T}{\pi} \frac{\omega}{\phi} + \frac{L}{R}$$

ou **T** représente la durée de l'oscillation du galvanomètre ballistique. A l'aide de cette méthode, nous pouvons facilement déterminer l'intervalle du temps entre les deux interruptions successives des deux contacts du pendule de Helmholtz.

La disposition du circuit qui permet d'exécuter ces mesures avec une grande précision est donnée par le schéma ci-joint :

La résistance **R** est très grande par rapport à la résistance **r** et la

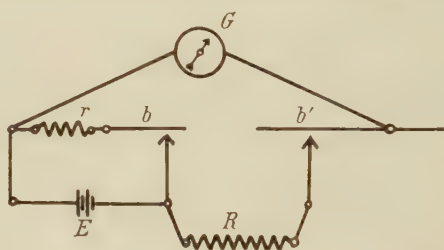


Fig. 3.

self-induction du circuit. Dans ce genre d'expériences, l'emploi du galvanomètre ballistique de Deprez-d'Arsonval est très avantageux.

L'équation du mouvement d'un galvanomètre du type Deprez-d'Arsonval est donnée par la formule suivante :

$$\frac{d^2\omega}{dt^2} + \frac{1}{k} \left(\Lambda + \frac{H^2 n^2 S^2}{R} \cos^2 \omega \right) \frac{d\omega}{dt} + \omega \tau = 0$$

ou k représente le moment d'inertie de la bobine mobile du galvanomètre ;

Λ le moment de la résistance d'air, correspondant à la vitesse angulaire d'une unité ;

H , l'intensité du champ magnétique ;

n , le nombre des spires de la bobine mobile ;

R , la résistance du circuit ;

τ , le moment de torsion de la suspension, correspondant à la torsion d'un angle égal à l'unité ;

S , la surface moyenne des spires.

Nous déduisons de l'équation (a)

$$(b) \quad \omega = \omega_0 e^{-\frac{1}{2k} \left(\frac{H^2 n^2 S^2}{R} \right) t} \sin \left(\sqrt{\frac{\tau}{k} - \frac{1}{4k^2} \left(\Lambda + \frac{H^2 n^2 S^2}{R} \right)} t \right)$$

Pour qu'il nous soit permis de considérer le galvanomètre comme un galvanomètre ballistique, il est nécessaire et suffisant que la condition de périodicité, voir

$$\Lambda + \frac{H^2 n^2 S^2}{R} < 4\tau k$$

soit remplie.

Soit T_1 , la durée d'oscillation avec l'amortissement, T , la durée d'oscillation corrigée de l'amortissement, nous pouvons écrire alors avec une approximation suffisante :

$$T_1 = T \left[1 + \frac{1}{8k\tau} \left(\Lambda + \frac{H^2 n^2 S^2}{R} \right) \right]$$

Si l'amortissement est petit, on peut négliger la différence entre T et T_1 .

On peut exprimer l'équation (b) aussi par :

$$\omega = \omega_0 e^{-\frac{\gamma t}{T_1}} \sin \frac{\pi t}{T_1}$$

Nous obtenons les valeurs maxima et minima des élongations au moment où

$$\frac{d\omega}{dt} = 0$$

ce qui arrive quand

$$\left(\pi \frac{t}{T} \right) = \arcsin \frac{T}{T_1} \quad \frac{d\omega}{dt} = 0$$

Soit la valeur correspondante de l'angle ω_1 .

En calculant de la même manière l'angle ω' , correspondant à une oscillation sans amortissement, nous obtiendrons la relation

$$\omega_1 = \omega'_1 e^{-\gamma \frac{t}{T_1}}$$

ou α étant le décrement logarithmique :

$$\omega'_1 = \omega_1 \alpha^{\frac{1}{\pi} \arcsin \frac{T}{T_1}}$$

ou encore dans le cas d'un petit amortissement

$$\omega'_1 = \omega_1 \sqrt{\alpha}$$

III. — Détermination du temps t d'après la charge d'un condensateur, dont la capacité est connue.

La troisième méthode nous donne le moyen d'évaluer l'intervalle de temps qui sépare l'ouverture des deux leviers de contact, en déterminant la charge électrique d'un condensateur **C**. (Voir fig. 4.)

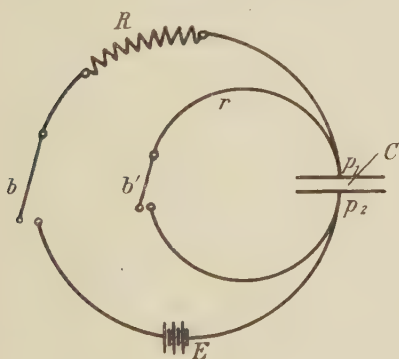


Fig. 4.

Les armatures p_1 et p_2 sont réunies par deux circuits distincts aux leviers de contact **b**, **b'** que déplacent les loquets **h**, **k** dans leur mouvement.

L'un des circuits renferme une résistance **R** et la source de force électromotrice constante **E**. Lorsque

le levier **b'** est ouvert, la charge commence et elle cesse au moment de l'ouverture du levier **b**.

Cette méthode repose sur des mesures purement électriques; elle est analogue à celle employée par M. Edelmann dans ses expériences, avec cette différence qu'il déterminait *la décharge* et *non* la charge du condensateur, comme nous l'avons fait.

Soit $p_2 - p_1 = P$, la différence de potentiel des deux armatures du condensateur.

b, b' les deux leviers de contact.

R , la résistance totale du circuit.

$$p_1 \ b \ E \ p_2$$

r , la résistance du circuit $p_1 \ b' \ p_2$. Cette résistance r doit être tout à fait négligeable par rapport à la résistance intercalée R .

En tenant compte de cette condition, nous pouvons considérer $p_2 - p_1 = 0$ au moment où $t = 0$, c'est-à-dire quand les deux leviers b et b' sont fermés.

Les équations de l'expérience sont les suivantes :

$$(1) \quad \begin{cases} E - P - Ri \\ i = C \frac{dP}{dt} \end{cases}$$

où i représente l'intensité instantanée du courant.

Des équations (1) on tire :

$$RC \frac{dP}{dt} + (P - E) = 0$$

ou

$$C \frac{dP}{dt} + \frac{1}{R} (P - E) = 0$$

On donne à la dernière équation la forme d'une intégrale générale :

$$(2) \quad P = E (1 + A e^{kt})$$

$$k = - \frac{1}{RC}$$

En tenant compte de la condition $\mathbf{P} = 0$ quand $\mathbf{t} = 0$, on obtient

$$\mathbf{A} = -1$$

et l'équation se présente sous la même forme que l'équation (2')

$$(2') \quad \mathbf{P} = \mathbf{E} \left(1 - e^{-t/RC} \right)$$

d'où nous tirons le rapport $\frac{t}{C}$.

$$(3) \quad \frac{t}{C} = \frac{\lg E - \lg(E-P)}{\lg e} \cdot R$$

Nous voyons donc qu'il suffit de connaître $\mathbf{C}$, $\mathbf{E}$, $\mathbf{P}$ et $\mathbf{R}$. pour pouvoir déterminer $\mathbf{t}$. La méthode est bien simple en elle-même ; pour la rendre en outre aussi exacte que possible, il est nécessaire de l'employer dans des conditions correspondant au maximum de sensibilité. Cette condition est réalisée pour une valeur donnée de $\mathbf{C}$ lorsque la résistance $\mathbf{R}$ est telle que, à une grande variation de $\mathbf{P}$ correspond une très faible variation de $\mathbf{t}$.

Autrement dit, la fonction $\mathbf{F}(\mathbf{R}) = \frac{d\mathbf{P}}{dt}$ doit être maximum.

L'équation (2') nous donne

$$\mathbf{F}(\mathbf{R}) = \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{RC}} \cdot e^{-t/RC}$$

d'où

$$\frac{d\mathbf{F}}{d\mathbf{R}} = -\mathbf{E} \cdot \frac{e^{-t/RC}}{\mathbf{C}\mathbf{R}^2} \left(\frac{t}{\mathbf{C}\mathbf{R}} + 1 \right)$$

La fonction donc atteint son maximum quand

$$\frac{t}{CR} = 1$$

En mettant les résultats obtenus dans l'équation (2'), nous aurons les valeurs de **P** et $1 - \frac{1}{e}$ correspondant au maximum de sensibilité.

$$1 - \frac{1}{e} = 0.63212$$

$$P = 0.63212E$$

La valeur de **P** est tout à fait déterminée; si nous voulons donc nous servir de cette méthode, nous sommes obligés — **C** et **t**, étant donnés, de calculer **R** de façon à obtenir pour **P** la valeur mentionnée plus haut correspondant à l'interruption de la charge du condensateur. Il nous reste à présent à donner les détails de nos expériences et à fixer le degré d'exactitude qu'il est possible d'obtenir avec notre méthode. Nous commençons par la description des appareils dont nous nous sommes servi.

Condensateurs.

Les condensateurs électriques, employés dans notre travail, ont été construits d'après le principe des condensateurs à air de Lord Kelvin, ainsi appelés parce que le dielectrique est constitué par l'air.

Nos condensateurs ont la forme de piles composées

de plaques métalliques, superposées et séparées par une couche d'air d'un millimètre d'épaisseur.

Un tel condensateur présente la combinaison de deux systèmes de plaques, chaque système correspondant à une des armatures. Les deux systèmes sont constitués de plaques de même métal et de dimensions égales.

Les plaques sont prismatiques et mesurent $100 \times 100 \times 1 \text{ m/m}$.

Chacun des deux systèmes de plaques est monté sur quatre pieds métalliques qui passent par les ouvertures découpées dans les plaques aux quatre coins (sur l'axe des diagonales). (Voir croquis n° 5.)

Ces pieds passent ensuite par la plaque ronde **B** du bas, qui sert de base pour la pile entière.

Les plaques de chaque système sont séparées entre elles par des rondelles métalliques ; la distance entre les plaques successives de même système, c'est-à-dire entre les plaques montées sur les pieds **a, a**, ou **b, b** est de trois millimètres (3 m/m).

Entre les deux plaques successives d'un système passe la plaque de l'autre ; ainsi les distances entre les plaques des deux systèmes hétérogènes sont de 1 m/m .

Les plaques sont serrées contre la base **B** au moyen d'écrous montés sur les pieds au-dessous de la base et sur les extrémités supérieures des pieds.

Le point important, c'est l'isolement réciproque des deux systèmes, parce que les pieds ainsi que la base **B** sont en métal.

On y arrive d'une manière très simple, comme on le voit sur le croquis.

Soit *a, a, a, a* les pieds qui passent par les plaques **A**.

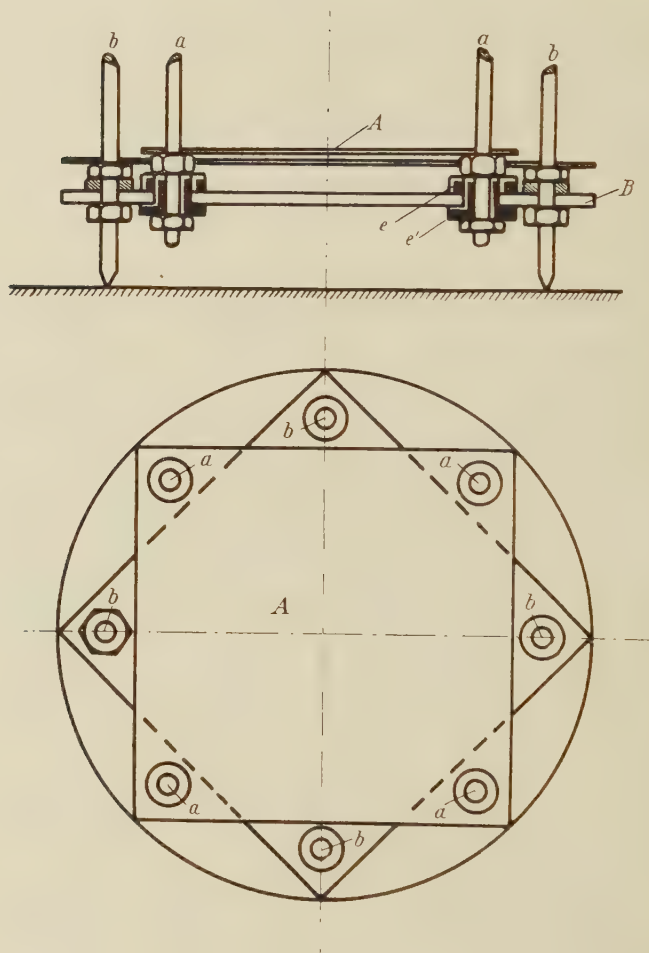


Fig. 5.

La première plaque inférieure de ce système est

isolée totalement de la base **B**, par la rondelle en ébonite **e**.

L'isolement des pieds métalliques **a**, **a...** est effectué à l'aide d'une petite douille en ébonite qui entoure les pieds et au moyen d'une rondelle également en ébonite, au-dessous de base et qui ne forme avec la douille qu'un seul corps **e'**.

Les extrémités supérieures des pieds **a** et **b** sont munies de serre-fils à l'aide desquels on réunit les condensateurs à la batterie.

Les condensateurs reposent sur la table par les extrémités inférieures des pieds **b**, **b...** qui dépassent la base de 2 ou 3 cm.

Dans nos expériences, les condensateurs reposaient par les pieds sur une plaque en verre, afin de les isoler parfaitement.

En outre, ils étaient enfermés dans une caisse vitrée.

Le nombre de plaques correspondant à chaque système est de 50.

Résistances.

Une question des plus importantes c'est d'employer des résistances aussi constantes que possible et sans self-induction.

En général, nous nous sommes servi des résistances en charbon, spécialement construites pour nos expériences par la fabrique de lampes à incandescence de Zurich.

Nous donnons plus bas la description de ces résistances.

Les résistances du constantau de Siemens et Halske nous ont donné également des résultats satisfaisants. Elles étaient composées de rubans de constantau, enroulés sur les plaquettes de micca.

Résistances en charbon.

Ces résistances sont faites en fils de charbon très minces, enfermés complètement dans des tubes en verre. Ces fils sont tendus en ligne droite entre les extrémités des tubes, ce qui élimine toute self-induction. Les deux extrémités des tubes sont traversés par les fils en platine, auxquels les fils de charbon sont soudés. En dehors des tubes, les bouts des fils de platine sont soudés à des fils de cuivre isolés, qui relient les résistances en charbon entre elles et aux bornes.

Les fils en charbon mesurent 18 cm. environ de longueur ; les tubes 20 cm. Le nombre de résistances employées était de 40 ; elles étaient accouplées en séries et réunies aux bornes de telle façon qu'il était possible de prendre un nombre quelconque de résistances. Tout le système est enfermé dans une boîte dont le couvercle est en ébonite, Sur ce dernier sont montés les blocs de contact au nombre de 40, disposés en trois rangs parallèles et reliés à la partie inférieure aux tubes renfermant les fils en charbon. La résistance d'un seul fil en charbon mesure 2,000 ohms environ.

Voici quelques valeurs de ces résistances mesurées
à 18° 3 C :

1	résistance	.	.	.	.	.	2623 Ω
2	»	.	.	.	.	.	5242,20
3	»	.	.	.	.	.	7848,30
5	»	.	.	.	.	.	10456,50
6	»	.	.	.	.	.	13092,50
10	»	.	.	.	.	.	23668,20
11	»	.	.	.	.	.	26263,10
15	»	.	.	.	.	.	36748,50
20	»	.	.	.	.	.	49880,00
25	»	.	.	.	.	.	63035,50
30	»	.	.	.	.	.	76186,80
35	»	.	.	.	.	.	89283,00
40	»	.	.	.	.	.	102358,00

L'ordre même de nos expériences a été le suivant :

On déterminait la différence de potentiel **P**, en déchargeant le condensateur dans un galvanomètre ballistique de M. Edelmann, construit d'après le principe Deprez-d'Arsonval. Cet instrument, au cours de nos expériences, a donné des résultats parfaits.

La sensibilité du dit galvanomètre était mesurée tous les jours et restait invariable. Les observations

ont été faites dans une chambre à température constante, où il était possible de maintenir la température à 0.1°C près.

La force électromotrice, fournie par une batterie d'accumulateurs, était mesurée deux fois par jour par la méthode de compensation.

Nous avons employé de grands éléments parfaitement isolés, dont la capacité était de 120 Amp. heures.

Les résultats de nombreuses observations ont démontré que les écarts de la force électromotrice de chaque élément, mesurée avant et après chaque série d'expériences, étaient inférieurs à 0.001 volt.

Pour vérifier l'équation (2'), les conditions d'expériences ont été changées de la manière suivante :

1° Soit **E**, la force électromotrice ;

C, la capacité du condensateur ;

S, la distance entre les deux leviers de contact.

S restait invariable, tandis qu'on changeait les valeurs de **R**. — Dans le tableau ci-joint, nous reproduisons les valeurs successives de la force électrom. **E** (en Volts) et les déviations δ du galvanomètre (en divisions de l'échelle).

T représente la température observée durant le temps des expériences.

$$T = 19^{\circ},4C$$

Nombre des éléments	E (en Volts)	δ
9	17,856	122,12
10	19,850	135,85
11	21,836	149,59
12	23,832	163,14
13	25,819	176,93
14	27,809	190,70

Détermination du rapport $\frac{t}{C}$

$$T = 19^{\circ},4C$$

E (en Volts)	R (en Ohms)	δ	P	$\frac{t}{C}$
59,8604	113455	122,91	17,971	13652
	118585	129,64	18,948	13641
	126447	139,19	20,333	13653
	134257	148,17	21,630	13666
	142059	156,80	22,878	13652
	149849	164,82	24,074	13650
	157984	172,63	25,199	13668
	165904	180,08	26,275	13661

En examinant les valeurs de $\frac{t}{C}$ dans le tableau ci-dessus, nous voyons qu'il n'y a aucune erreur systématique.

Comme valeur moyenne de $\frac{t}{C}$, nous avons :

$$\frac{t}{C} = 13655 \text{ moyen}$$

d'où il résulte que l'erreur moyenne et probable, calculées d'après la méthode des moindres carrés, sont données par :

L'erreur moyenne		9.015857
» probable		6.076680

ou

0.066 et 0.044 p. 100.

2° Pour constater si notre méthode est indépendante de la valeur de la force électromotrice, nous avons entrepris toute une série d'expériences.

Nous en donnons les résultats dans les tableaux suivants :

PREMIÈRE SÉRIE

$$T = 19^{\circ},4C.$$

E (en Volts)	δ (en div. de l'échelle)	R (en Ohms)	$\frac{t}{C}$
30,440	195,26	87384,7	67153
28,413	168,60	79492,2	67153
26,390	169,02	87384,7	67141
24,366	166,20	95185,0	67120
22,335	186,36	11086,0	67135

D'où nous déduisons :

La valeur moyenne de $\frac{t}{C} = 67141,2$

L'erreur probable. 9,932 2

L'erreur probable en p. 100 . . 0,015

DEUXIÈME SÉRIE

$$T = 19^{\circ},4C.$$

E (en Volts)	δ	R (en $\sim$)	$\frac{t}{C}$
36,420	141,92	52975	66952
34,403	142,18	55596	66997
32,391	141,35	58198	66966
30,393	139,29	60796	66973
28,370	142,04	66130	67006

La valeur moyenne de $\frac{t}{C} = 66978,8$

L'erreur probable 15.0213

L'erreur probable en p. 100 . . 0.02

Nous voyons donc que l'erreur est très petite; elle ne dépasse pas 0,02 p. 100.

Le but principal que nous nous sommes proposé est la vérification de la formule (2') dans toutes les conditions d'expérience.

Il nous importait donc peu que la résistance **R** eût réellement la valeur fixée par la condition du maximum de sensibilité, d'autant que nos erreurs étaient excessivement petites.

Les déviations δ du galvanomètre que nous avons mises dans les tableaux représentent la moyenne de 10 observations au moins.

(Voir les tableaux précédents.)

Afin de faire valoir le degré d'exactitude, nous reproduisons dans le tableau ci-dessous quelques séries d'observations.

δ		
I ^{re} SÉRIE	II ^{me} SÉRIE	III ^{me} SÉRIE
149,7	108,8	195,6
149,5	108,9	195,9
149,8	109,0	195,6
149,4	108,8	195,7
149,8	108,9	195,9
149,7	108,8	195,9
149,5	108,9	195,7
149,5	108,9	195,6
149,4	108,9	195,6
149,7	108,8	195,7
149,4		
149,4		
149,8		
Les moyennes :		
149,59	108,87	195,70

Les erreurs moyennes :

0.16763 0.06749 0.13333

Les erreurs probables :

0.11298 0.04549 0.08987

Où :

0.07 0.04 0.04

p. 100.

Nous voyons donc que les déviations observées, prises une à une, présentent un degré d'exactitude tout à fait satisfaisant.

La méthode une fois établie et vérifiée, il s'agissait désormais de l'employer aux mesures que nous nous proposons d'effectuer, et particulièrement à la détermination du rapport $\frac{t}{C}$.

On pouvait le faire de deux façons différentes :

1^o Déterminer les valeurs de $\frac{t}{C}$ correspondant à une capacité constante **C** en variant la position de vis qui règlent les leviers de contacts, c'est-à-dire en variant la distance **S** et en déduisant du tableau ainsi formé la valeur de $\frac{t}{C}$ qui correspond à une distance **S** quelconque.

Nous n'avons pu employer cette méthode parce que, au cours de nos expériences, nous avons constaté qu'en faisant une détermination de $\frac{t}{C}$ pour une distance — **S**, puis une autre pour une distance différente et, en revenant ensuite à la position primitive, nous ne retrouvions plus la première valeur obtenue.

Le tableau suivant donne les déviations δ , obtenues en chargeant un condensateur de capacité invariable avec une force électromotrice constante **E**, la résistance **R** étant constante également.

$$E = 24,33 \text{ V.}; R = 76833 \Omega$$

S = 10 tours complets.

δ_1	δ_2
139,8	140,3
139,8	140,2
139,9	140,2
139,7	140,1
139,8	140,0
139,8	140,3
139,9	140,3
139,8	140,2
139,9	140,3
139,9	140,2
139,7	140,1

Les moyennes :

$$\frac{\bar{\delta}_1}{139,82} \quad \text{---} \quad \frac{\bar{\delta}_2}{140,20}$$

Les erreurs moyennes :

$$0.07509 \quad \quad \quad 0.1000$$

$$\text{Ou :} \quad 0.05 \quad \quad \quad 0.07 \quad \text{p. 100.}$$

La différence :

$$\delta_2 - \delta_1 = 0.38$$

$$\text{Ou :} \quad \quad \quad 0.27 \text{ p. 100.}$$

Nous voyons donc qu'en changeant la position de la vis les résultats diffèrent de 0.27 p. 100.

2° On pouvait aussi déterminer le rapport $\left(\frac{t}{C}\right)$ entre

le temps correspondant à une position quelconque de la vis et la capacité constante **C**, en changeant simplement la disposition du circuit à l'aide d'un commutateur.

Dans toutes nos expériences, nous nous sommes servi de ce dernier procédé d'évaluation de $\frac{t}{C}$, ce qui nous a permis d'obtenir des résultats dont l'erreur ne dépassait pas, comme nous l'avons vu, 0.02 p. 100.

Les deux méthodes précédentes sont en défaut. En effet, la première méthode dépend de la position de la vis, et alors les résultats diffèrent de 0.3 p. 100.

De plus, la méthode de Pouillet présente l'inconvénient de nous rendre tributaires de la durée des oscillations du galvanomètre et de sa sensibilité. Or, nous savons qu'il est beaucoup plus difficile de maintenir constantes la sensibilité et la durée des oscillations que la capacité, et c'est pourquoi il est préférable d'employer le second procédé de la troisième méthode, qui n'est basée que sur la constance de la capacité.

Placés dans des conditions très favorables, nos condensateurs n'ont rien laissé à désirer au point de vue de la constance de capacité. — En effet, les écarts de la température dans la chambre, où nos mesures ont été faites, étaient tout à fait insignifiants.

De cette manière, nous étions autorisés de considérer la capacité de nos condensateurs comme absolument constante.

Charge d'un condensateur placé dans un circuit inductif.

Avant de donner les détails de nos recherches, nous croyons utile de résumer brièvement la théorie de phénomènes de la charge et de la décharge d'un condensateur.

Rapport entre la charge et la décharge d'un condensateur intercalé dans le même circuit inductif.

Le croquis (fig. 6) représente la disposition du circuit qui permet de charger le condensateur durant un temps déterminé t .

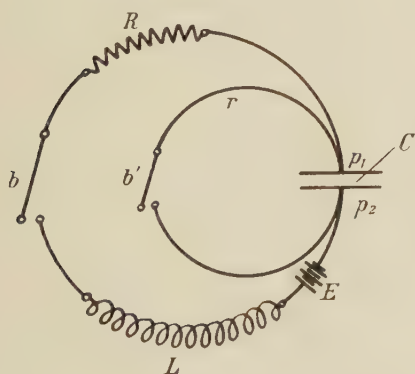


Fig. 6.

b, b' représente les deux leviers de contacts ;

L , le coefficient de self-induction d'une bobine ;

R , la résistance ohmique du circuit entier $p_1 R b L E p_2$;

r , la résistance du circuit $p_1 b' p_2$;

E , la source de force électromotrice constante.

L'expérience comprend deux phases :

Les deux leviers de contacts b, b' étant fermés, la

différence de potentiel entre p_1 — p_2 , représentée par P_0 , est donnée par l'équation

$$(1) \quad P_0 = \frac{r}{R+r} \cdot E$$

le circuit est parcouru par un courant d'intensité i_0 :

$$(2) \quad i_0 = \frac{E}{R+r}$$

Deuxième phase : b' étant ensuite ouvert, le condensateur commence à se charger, et la différence de potentiel entre les deux armatures p_1 et p_2 varie avec le temps et sa direction est opposée à celle de E .

Soit P cette différence de potentiel. L'intensité du courant étant également fonction du temps, nous aurons deux équations :

$$(3) \quad E - P - L \frac{di}{dt} = Ri$$

$$(4) \quad i = C \frac{dP}{dt}$$

d'où

$$(5) \quad \frac{d^2P}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dP}{dt} + \frac{1}{LC} P = \frac{1}{LC} E$$

mettons

$$\frac{R}{L} = 2a ; \quad \frac{1}{LC} = b$$

$$(6) \quad \frac{d^2P}{dt^2} + 2a \frac{dP}{dt} + b(P - E) = 0$$

Considérons à présent le croquis N° 7 représentant le circuit adapté à la décharge du condensateur.

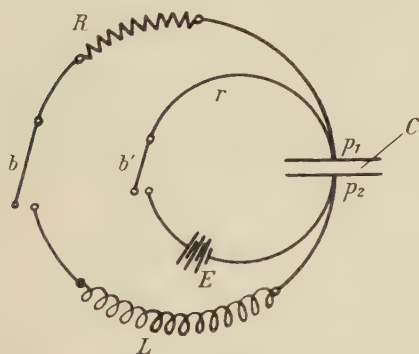


Fig. 7.

Cette nouvelle disposition ne diffère de la première que par un changement dans la position de la source **E**, intercalée à présent entre les points **p₂** et **b'**. Nous aurons, comme précédemment, deux phases à distinguer :

Première phase : les deux leviers de contacts **b**, **b'** étant fermés, la différence de potentiel entre **p₁**, **p₂** = **P₀**, qui est donnée par

$$(7) \quad P_0' = \frac{R}{R + r} \cdot E$$

Le circuit est parcouru par le courant **i₀** :

$$(8) \quad i_0 = \frac{E}{R + r}$$

On voit également que le levier **b'** étant ouvert, le condensateur commence à se décharger et la différence de potentiel **P'** entre **p₁**, **p₂** sera une fonction du temps déterminée par l'équation

$$(9) \quad \frac{d^2 P'}{dt^2} + 2a \frac{dP'}{dt} + bP' = 0$$

L'équation (6) comparée avec (9) nous montre d'une manière évidente, qu'entre les deux équations existe un rapport, qui se traduit par :

$$(10) \quad P = E + A P'$$

ou **P** représente l'intégrale générale de l'équation (6) et **P'**, celle de l'équation (9), **A** étant une constante.

$$\text{Vu que } P = P_0 \text{ et } P' = P'_0,$$

quand $t = 0$, nous aurons :

$$A = - \frac{E - P_0}{P'_0}$$

ou autrement :

$$(11) \quad P - E/2 = E/2 - \frac{E - P_0}{P'_0} \cdot P'$$

ce qui se traduit par l'énoncé suivant :

« Pour obtenir la courbe représentant la fonction **P**, on procède de la manière suivante :

La courbe de fonction **P'** étant donnée, on en construit une autre dont les ordonnées augmentées dans le rapport $\frac{E - P_0}{P'_0}$ sont portées en sens inverse des ordonnées de la courbe **P'** rapportée à un axe parallèle aux obscisses distant du 1^{er} axe de $\frac{1}{2} E$. »

La nouvelle courbe est donc symétrique de la première, avec la réserve que les ordonnées des deux courbes diffèrent de signe et sont dans un rapport constant.

Nous voyons donc que le caractère des deux phénomènes, celui de la charge et de la décharge, reste le même.

L'équation différentielle de la charge du condensateur est donnée par :

$$(1) \quad \frac{d^2P}{dt^2} + 2a \frac{dP}{dt} + b(P - E) = 0$$

ou nous avons mis

$$a = \frac{R}{2L} \quad \text{et} \quad b = \frac{1}{LC}$$

Cette équation différentielle possède l'intégrale générale suivante :

$$P = E \left\{ 1 - e^{-at} + \left(A e^{(\sqrt{a^2 - b})t} + B e^{-(\sqrt{a^2 - b})t} \right) \right\}$$

Si $a^2 < b$, c'est-à-dire $R < 2 \sqrt{\frac{L}{C}}$ les exposants des fonctions entre parenthèses, étant dans ce cas imaginaires, la fonction même **P** devient périodique, ou autrement dit, la charge devient oscillatoire.

$$P = E \left[1 - e^{-at} \left(A \cos(t\sqrt{b - a^2}) + B \sin(t\sqrt{b - a^2}) \right) \right]$$

L'intensité **i** s'exprime alors comme fonction du temps.

$$i = C \frac{dP}{dt} = CE e^{-at} \left[(Aa - B\sqrt{b - a^2}) \cos(\sqrt{b - a^2}t) + (Ba + A\sqrt{b - a^2}) \sin(\sqrt{b - a^2}t) \right]$$

Dans le cas où $P = P_0$ et $i = i_0$
quand $t = 0$, nous aurons

$$P = E - e^{-at} \left[(E - P_0) \cos (\sqrt{b-a^2})t + \frac{1}{\sqrt{b-a^2}} \cdot \right.$$

$$\left. \left[a(E - P_0) - \frac{i_0}{C} \right] \cdot \sin (\sqrt{b-a^2})t \right]$$

$$i = e^{-at} \left[i_0 \cos (\sqrt{b-a^2})t + \frac{1}{\sqrt{b-a^2}} \cdot \right.$$

$$\left. \left[\frac{E - P_0}{L} - a i_0 \right] \cdot \sin (\sqrt{b-a^2})t \right]$$

$$\text{mettons : } \beta = \sqrt{b-a^2}$$

$$N = \sqrt{(E-P_0)^2 - R i_0 (E-P_0) + b L^2 i_0^2}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin \varphi = \sqrt{\frac{L}{C}} \cdot \frac{ab(E - P_0) - i_0}{N} \\ \cos \varphi = \sqrt{LC} \frac{\sqrt{b-a^2}(E - P_0)}{N} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin \psi = \frac{\sqrt{b-a^2} \cdot L i_0}{N} \\ \cos \psi = \frac{E - P_0 - \frac{1}{2} R i_0}{N} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin \theta = \sqrt{LC} \frac{a(E - P_0 - R i_0) + b L i_0}{N} \\ \cos \theta = \sqrt{LC} \frac{\sqrt{b-a^2}(E - P_0 - R i_0)}{N} \end{array} \right.$$

d'où nous aurons :

$$I \left\{ \begin{array}{l} P = E - (E - P_0) e^{-at} \frac{\cos(\beta t - \varphi)}{\cos \varphi} \\ i = i_0 e^{-at} \frac{\sin(\beta t + \psi)}{\sin \psi} \\ \frac{di}{dt} = \frac{E - P_0 - R i_0}{L} e^{-at} \frac{\cos(\beta t + \theta)}{\cos \theta} \end{array} \right.$$

Nous voyons donc qu'on peut exprimer en courbes sinusoïdales décroissantes l'ensemble des fonctions, représentées par (I).

La période est donnée par

$$(1) \quad T = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi \sqrt{LC}}{\sqrt{1 - \frac{C}{4L} R^2}}$$

Le rapport du décrement R est donné par :

$$(2) \quad k = e^{aT/2} = e^{\frac{\pi/2}{\beta} R \sqrt{\frac{C}{L}} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{C}{4L} R^2}}}$$

et le décrement logarithmique α :

$$(3) \quad \alpha = \frac{\pi}{2} R \sqrt{\frac{C}{L}} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{C}{4L} R^2}}$$

ce qui se traduit par l'énoncé suivant :

« La période et le rapport du décrement ne dépendent pas des conditions initiales. »

De l'équation (a), on tire une série de conséquences intéressantes.

R étant petit par rapport à $\sqrt{\frac{L}{C}}$ nous pouvons admettre $T = 2\pi \sqrt{LC}$
ou autrement :

$$\frac{T}{C} = \Theta = 2\pi \sqrt{\frac{L}{C}}$$

T croît assez rapidement avec l'accroissement de la résistance R , dans le cas où les valeurs de cette dernière deviennent considérables, vu que

$$\frac{dT}{dR} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{L}{C}} \frac{CR}{(1 - \frac{C}{4L} R^2)^{3/2}}$$

reste toujours positif.

De même $\frac{dT}{dC}$ reste aussi toujours positif.

$$\frac{dT}{dC} = \pi \sqrt{\frac{L}{C}} \cdot \frac{1}{(1 - \frac{C}{4L} R^2)^{3/2}}$$

puisque pour cette charge oscillatoire $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$

$$\text{d'où } C < 4 \frac{L}{R^2}$$

En différentiant le terme :

$$4\pi^2 C \frac{1}{T^2} = \frac{1}{L} - \frac{CR^2}{4L^2}$$

par rapport à **L**, nous aurons :

$$4\pi^2 C \frac{d\left(\frac{1}{T^2}\right)}{dL} = -\frac{1}{L^2} + \frac{1}{2} \frac{CR^2}{L^3}$$

$$4\pi^2 C \frac{d^2\left(\frac{1}{T^2}\right)}{dL^2} = \frac{2}{L^3} - \frac{3}{2} \frac{CR^2}{L^4}$$

T devient donc minimum quand $L = \frac{1}{2} CR^2$

et alors :

$$(\gamma) \quad T_0 = 2 \pi CR$$

L augmente-t-il, **T** croît alors jusqu'à ∞ .

L'équation du décrement logarithmique :

$$\alpha = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{C}{4L} R^2}}$$

nous permet d'admettre :

$$\alpha = \frac{\pi}{2} R \sqrt{\frac{C}{L}}$$

R étant petit par rapport à $\sqrt{\frac{L}{C}}$

ou encore :

$$\alpha \approx \frac{\pi^2 R}{(2)}$$

$$\text{vu que } \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{(1)}{2\pi}$$

Vérification expérimentale des équations correspondant à la charge ou à la décharge d'un condensateur, placé dans un circuit inductif.

L'équation de la période ainsi que celle du décrement correspondant à la charge ou à la décharge d'un condensateur, ont été vérifiées expérimentalement par de nombreux physiciens.

Parmi les travaux publiés sur ce sujet, nous ne signalons que les plus anciens, comme ceux de Feddersen ¹, N. Schiller ², Hiecke ³, Lorenz ⁴.

Aux travaux plus récents appartiennent ceux de Trowbridge et Sabine ⁵, Miesler ⁶, W. L. Robb ⁷, Wulf ⁸, Tallquist ⁹, Seiler ¹⁰, Batelli et Magri ¹¹.

Les travaux de Tallquist, Seiler et Batelli-Magri méritent d'être distingués, particulièrement au point de vue de leur exactitude. Malgré les différentes méthodes employées par ces trois expérimentateurs, ils ont prouvé d'une manière incontestable que la formule de la période d'oscillation

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}}$$

¹ *Poggend. Annal.* V. 103, p. 69; vol. 108, p. 297; vol. 113, p. 437; v. 116, p. 132.

² *Poggend. Annal.* V. 52, p. 535.

³ *Wien. Bericht.* V. 96', p. 134.

⁴ *Wied. Annal.* V. 7, p. 161.

⁵ *Philosophie Magaz.* (5) V. 30, p. 323.

⁶ *Wien. Bericht.* V. 99, II', p. 579.

⁷ *Philosophie Magaz.* V. 34 (5), p. 389.

⁸ *Wien. Ber.* V. 105, II', p. 667.

⁹ *Acta Societ. Scient. Fenn.* V. XXIII, XXVI, XXVIII.

¹⁰ *Wied. Annal.* V. 61, p. 30.

¹¹ *Physik. Zeitschrift.* V. 3, p. 539.

peut être considérée comme juste. Seiler et Tallquist se sont servis, dans leur méthode, de l'interrupteur à pendule; Batelli et Magri ont employé une ingénieuse méthode photographique.

La différence de la valeur théorique et la valeur observée par eux ne dépasse pas 0.1, p. 100; le résultat donc est très satisfaisant.

Par contre, la formule du décrement logarithmique

$$\alpha = \frac{R}{4L} T$$

donne des résultats qui diffèrent des valeurs observées de quelques pour cents; le fait a été mentionné déjà par Schiller ¹.

Il a essayé d'expliquer cette grande discordance entre la théorie et l'expérience par l'isolation défectueuse de son condensateur et des spires de sa bobine. Toutefois, il n'a pas réussi à le démontrer clairement.

On est forcé d'admettre, pour expliquer le fait, une action d'induction sur les conducteurs voisins ², ainsi que l'existence d'hysteresis dielectrique ³.

Tallquist et Sundell ⁴ ont voulu prouver indirectement que ce sont surtout les causes mentionnées par Schiller auxquelles il faut attribuer la discordance entre la théorie et l'expérience.

De cette manière, comme nous le voyons, il n'a été rien dit de positif, et la question de trouver une

¹ Loc. cit.

² Klemencie. *Wien. Ber.* V. 93, p. 491.

³ Porter. *Proceed. of the Roy Soc.* V. 54, p. 7.

⁴ Tallquist et Sundell. *Drude's Annal.* V. 4, p. 72.

preuve directe se posait. Nous nous sommes donc proposé d'étudier la question de plus près. Il est évident que la réussite dépendait entièrement des conditions d'expérience même, c'est-à-dire qu'il était nécessaire de tenir compte des exigences imposées par la théorie.

Il a fallu éliminer d'abord les influences nuisibles mentionnées plus haut.

En employant nos condensateurs à air, nous pouvions écarter toute l'hypothèse d'une influence du dielectrique ; mais, par contre, nous avons été obligé de faire construire une bobine d'induction, afin d'être sûr de l'isolation de ses spires, et d'avoir à notre disposition une bobine possédant une capacité minime. Après plusieurs essais, nous nous sommes décidé finalement à construire notre bobine d'après les principes suivants :

Bobine.

Les parois de la bobine sont carrées et mesurent 80 cm. de côté ; elles sont construites de trois couches superposées de planchettes, dont les côtés se croisent sous un angle de 90^0 , afin d'éliminer toute dilation ou retrécissement, dû au travail du bois.

Au milieu, les deux parois sont consolidées par trois vis en fibre vulcanisée, disposées en triangle. Suivant les diagonales, les parois portent des trous par lesquels passent des petits cylindres en ébonite ; leur nombre, sur chaque diagonale, est de 20.

Les distances entre les centres des deux cylindres

voisins sont de $15^{\text{m}}/\text{m}$. — Un fil en cuivre, parfaitement isolé, est enroulé en spirale sur ces cylindres (en commençant par le plus proche du centre). Le nombre de spires sur chaque cylindre est de 30 ; la distance entre deux spires sur le même cylindre est de $2^{\text{m}}/\text{m}$. Le nombre total de spires = 600. La distance entre les parois de la bobine mesure $67^{\text{m}}/\text{m}$. Le fil non isolé mesure $0'8^{\text{m}}/\text{m}$ de diamètre.

Le croquis ci-joint représente la disposition du circuit.

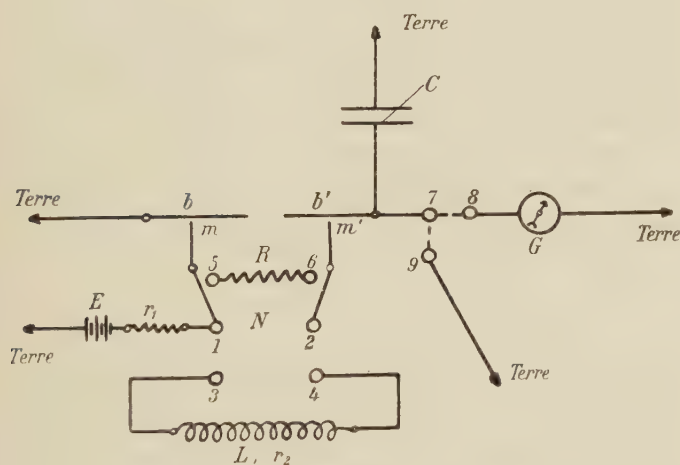


Fig. 8

E, la batterie d'accumulateurs constituant la source d'électricité fournissant la force électromotrice constante **E**.

Un des pôles de la batterie est relié à la terre, tandis que l'autre communique à l'aide de la résistance r_1 avec le godet (1), d'un commutateur à mercure bien isolé **N**.

Le même godet (1) est relié au buttoir de contact **m** du pendule de Helmholtz. Le levier de contact correspondant **b** est relié à la terre. A l'aide du commutateur **N** on peut relier (1) à (3) et (2) à (4) ou bien : (1) à (5) et (2) à (6).

L représente notre bobine mentionnée plus haut, dont le coefficient de self-induction est **L**, et la résistance **r₂**.

R, la résistance ohmique, à réglage, sans self-induction et sans capacité.

Le levier de contact **b'** est relié à la fois au godet (7) et à une des armatures d'un condensateur à air **C**.

Le godet (7) peut communiquer avec la terre — (9) ou bien avec le galvanomètre **G** — (8); —

b étant ouvert et (1) relié à (3) ainsi que (2) à (4), le condensateur **C** commence à se charger; la charge devient oscillatoire.

$$\text{si } \frac{1}{LC} > \frac{R^2}{4L^2}$$

En ouvrant ensuite le levier **b'** après un temps **t**, la charge cesse et le potentiel du condensateur correspondant au temps **t** est **P**. En déchargeant le condensateur dans le galvanomètre **C**, préalablement calibré, on peut facilement calculer **P**.

Si la résistance **r₂** est très petite, nous pouvons mettre dans nos équations **P₀ = 0** et **i₀ = 0**, d'où nous obtenons une série des équations suivantes :

$$P = E \left(1 - e^{-at} \cdot \frac{\cos(\beta t - \frac{\pi}{2})}{\beta \sqrt{LC}} \right)$$

$$i = \frac{E}{\beta L} \cdot e^{-at} \sin \beta t$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{E}{L} \cdot e^{-at} \frac{\cos (\beta t - \varphi)}{\beta \sqrt{LC}}$$

$$\text{où } \beta = \sqrt{b-a^2}; a = \frac{R}{2L}; b = \frac{1}{LC}$$

$$b > a^2$$

Le potentiel **P** croît d'abord arrive à son premier maximum dans le temps $t_1 = \frac{\pi}{\beta}$

$$P_{\max.} = E \left(1 + e^{-at_1} \right) = E \left(1 + e^{-a \frac{\pi}{\beta}} \right)$$

Les maxima suivants correspondent aux temps :

$$t_{\max.} (2n + 1) \frac{\pi}{\beta}$$

et

$$P_{\max.} E \left(1 + e^{-a (2n + 1) \frac{\pi}{\beta}} \right)$$

Dans les temps :

$$t = \frac{n \pi + \arccos \beta \sqrt{LC}}{\beta}$$

P arrive à sa valeur normale **E**. Par contre, les minima de **P** correspondent aux temps $t = 2n \frac{\pi}{\beta}$

$$P_{\min} = E \left(1 - e^{-an \pi / \beta} \right)$$

Par calculer le décrement logarithmique des oscillations, d'après les observations, nous procédons de la manière suivante :

Soit **P**₍₁₎, le premier maximum ;

P_(n), le maximum n^{ième} ;

alors :

P₍₁₎ — **E** représente la première amplitude ;

P_(n) — **E** » » n^{ième} »

$$\frac{P_{(1)} - E}{P_{(n)} - E} = \frac{P_{(1)} - E}{P_{(2)} - E} \cdot \frac{P_{(2)} - E}{P_{(3)} - E} \cdots \frac{P_{(n-2)} - E}{P_{(n-1)} - E} \cdot \frac{P_{(n-1)} - E}{P_{(n)} - E}$$

$$\frac{P_{(n+m)} - E}{P_{(n+m+1)} - E} = k = e^{\pi a / \beta}$$

$$\frac{P_{(1)} - E}{P_{(n)} - E} = k^{(n-1)}$$

et le décrement logarithmique,

$$\alpha = \lg k = \frac{1}{n-1} \cdot \lg \frac{P_{(1)} - E}{P_{(n)} - E}$$

On peut déterminer le décrement logarithmique d'une manière analogue, d'après les observations des minima de la courbe, représentant la charge du condensateur.

Il nous reste à présent à comparer le décrement déterminé tout à l'heure avec celui obtenu à l'aide de la formule (3), v. p. 43.

Nous pouvons donner à cette dernière une forme plus commode :

Nous avons :

$$T = 2\pi \sqrt{LC} \left\{ 1 + \frac{1}{8} \frac{C}{L} R^2 + \frac{3}{128} \left(\frac{C}{L} \cdot R^2 \right)^2 + \dots \right\}$$

Si $C R^2$ est petit par rapport à L , nous pouvons nous borner aux deux premiers termes, et alors nous aurons :

$$(1) \quad T = 2\pi \sqrt{LC} \left\{ 1 + \frac{1}{8} \frac{C}{L} R^2 \right\}$$

$$\text{Mettons } \frac{T}{C} = \Theta,$$

$$\text{alors : } \alpha = \frac{R C}{4 L} \quad (2).$$

L'équation (1) nous donne :

$$\frac{C}{L} = \frac{4\pi^2}{(2)^2 - \pi^2 R^2}$$

d'où :

$$\alpha = R \cdot \frac{\pi^2}{(2)^2 - \pi^2 R^2}$$

Cette dernière forme de l'expression de α est très avantageuse; en effet, il suffit de connaître $\frac{T}{C} = \Theta$

et la résistance **R**, pour pouvoir calculer le décrement.

Dans nos expériences, nous avons suivi un ordre qui nous a permis de les effectuer dans les conditions mentionnées plus haut.

On déterminait d'abord, à l'aide de la méthode de compensation, les forces électromotrices de notre batterie d'accumulateurs; après cela, on mettait en court circuit le commutateur **N**, entre (1) et (2); en ouvrant le levier **b**, on chargeait complètement le condensateur **C** avec des forces électromotrices différentes.

Le condensateur étant chargé, on le déchargeait ensuite en faisant passer la charge dans le galvanomètre, afin de calibrer ce dernier.

Ces opérations préliminaires **I** étant finies, on procédait aux opérations **II**, c'est-à-dire à la détermination du $\frac{T}{C}$ ou du rapport entre la durée de la période d'une oscillation et la capacité donnée **C**. L'ordre d'expérience même était le suivant :

Les godets (1) — (3) et (2) — (4) étant reliés, on ouvrait ensuite le circuit en **b** pour produire la charge oscillatoire du condensateur **C**.

Afin d'assurer au condensateur **C** la charge normale **E**, on changeait la position du levier de contact **b'** en le déplaçant et, ayant finalement trouvé la position correspondante, on découplait la bobine **L**, en intercalant à sa place la résistance **R**. On déterminait ensuite d'après la méthode mentionnée plus haut, le rapport $\frac{t_1}{C}$ entre le temps et la capacité.

Pour déterminer le rapport $\frac{t_2}{C}$, on intercalait de nouveau la bobine **L** en cherchant la position nouvelle de **b'**, la plus rapprochée de sa position initiale et correspondante au potentiel **P** du condensateur.

Il est évident que $\frac{t_1}{C} - \frac{t_2}{C} = \frac{T}{2C}$.

La série des valeurs $\frac{T}{2C}$ une fois trouvées, on déterminait la valeur correspondante de $\frac{T}{C}$ d'après la méthode des moindres carrés.

La détermination du rapport $\frac{T}{C}$ a été faite toujours au moment du passage par les charges normales, parce que, à ce moment, la variation de la charge était beaucoup plus grande pour une variation de **t** que dans le voisinage des charges maxima et minima.

Détermination des amplitudes maxima et minima.

La bobine **L** étant intercalée une fois pour toutes, on déterminait les amplitudes en déplaçant la vis qui actionne le levier **b'**; on ne déterminait que trois valeurs extrêmes des amplitudes : celles correspondant aux petites distances des leviers et trois autres correspondant à des distances plus grandes. La détermination de ces valeurs extrêmes demande une exactitude minutieuse; en effet, le calcul démontre

avec évidence qu'une erreur très petite dans l'observation de l'amplitude influence énormément le résultat final.

On terminait l'expérience chaque fois par l'opération **I**, en mesurant exactement la résistance **R** du circuit entier.

Nous reproduisons quelques séries d'observations pour rendre la description plus claire.

**Détermination de la force électrom. des accumulateurs
et de la sensibilité du galvanomètre.**

$$T = 19^{\circ},6C$$

Nombre des éléments	La force électrom. en Volts	Déviation du galvanomètre
2	4,001	71,50
3	6,006	107,10
4	8,014	143,10
5	10,020	178,52
6	12,020	214,78
7	14,048	250,20
8	16,071	287,98
9	18,070	324,60

Détermination du décrément.

Numéro de la valeur extrême	Déviations	Potentiel du condensateur en Volts
1 ^{er} maximum	295,10	16,345
1 ^{er} minimum	80,60	4,500
2 ^{me} maximum	265,20	14,795
5 ^{me} maximum	214,80	11,940
5 ^{me} minimum	149,40	8,313
6 ^{me} maximum	205,60	11,432

La moyenne de $\alpha = 0.0642990$.

**Détermination de la force électromotrice
des accumulateurs et de la sensibilité du galvanomètre.**

Nombre des éléments	La force électrom. en Volts	Déviations du galvanomètre
2	3,999	71,01
3	6,001	107,07
4	8,009	143,02
5	10,019	178,52
6	12,018	214,78
7	14,042	250,16
8	16,066	287,95
9	18,060	324,42

II. Détermination du rapport.

	$\frac{T}{C}$
$\frac{t_1}{C} = 21872$	$\frac{T}{2C}$
	8694
$\frac{t_2}{C} = 30476$	
	8714
$\frac{t_3}{C} = 39190$	
	8702
$\frac{t_4}{C} = 47892$	
	8693
$\frac{t_5}{C} = 56585$	
	8713
$\frac{t_6}{C} = 65298$	
	8695
$\frac{t_7}{C} = 73993$	
	8700
$\frac{t_8}{C} = 82693$	
	8706
$\frac{t_9}{C} = 91399$	
	8705
$\frac{t_{10}}{C} = 100104$	
	8699
$\frac{t_{11}}{C} = 108803$	
	8691
$\frac{t_{12}}{C} = 117494$	

La moyenne de $\frac{T}{2C} = 8701.$

L'erreur moyenne : 7.80 ou 0,09 %.

L'erreur probable : 5.26 ou 0,06 %.

La résistance du circuit :

$$R = 260,922 \, \Omega.$$

Calcul du décrement.

Nous avons entrepris un grand nombre des expériences préalables, afin d'assurer aux déterminations du décrement le plus grand degré d'exactitude.

La série d'essais nécessaire a été faite toujours dans une même journée, bien qu'elle demandait dix heures au moins du travail.

Dans le tableau ci-dessous, nous reproduisons les résultats de cinq déterminations pareilles.

Le décrement.

$$T = 19^{\circ}5C$$

Calculé	Observé	Différences entre val. observées et calculées en %
0.064603	0.064469	0.2
0.064603	0.064534	0.1
0.064350	0.064262	0.1
0.064359	0.064289	0.1
0.064287	0.064229	0.09

La différence moyenne : 0.12.

Le décrement logarithmique α a été calculé d'après la formule :

$$\alpha = \lg e \cdot \frac{R \cdot \pi^2}{\pi^2 R^2}$$

En comparant les résultats, nous voyons que la théorie et l'expérience concordent à 0.12 p. 100 près, à la condition que les exigences de la théorie soient satisfaites.

Nous avons déjà mentionné plus haut que Schiller, Tallquist et les autres expérimentateurs attribuaient une grande influence à la conductibilité entre les spires de la bobine d'induction, due à l'isolation défectueuse ; ils expliquaient par cette circonstance la discordance entre les valeurs théoriques du décrement logarithmique et celles données par les observations. En outre, ils ont voulu prouver indirectement la justesse de leur hypothèse et déterminer cette conductibilité supposée.

En effet, Tallquist et Sundell (*loc. cit.*) ont effectué une série d'expériences et ils ont trouvé que la conductibilité entre les spires de la bobine reste assez constante, mais toutefois l'erreur probable de cette détermination n'est pas une quantité négligeable puisqu'elle atteint presque 1 p. 100.

D'autre part, nous-mêmes, nous avons démontré qu'on peut déterminer théoriquement le décrement logarithmique des oscillations avec un degré d'exactitude suffisant. Il était donc très intéressant de voir

dans quelle proportion ce facteur influence la détermination du décrement. Pour pouvoir donner une réponse décisive et établir le rôle de la dite conductibilité, nous nous sommes décidé à l'étudier de plus près.

Dans leurs expériences, Schiller et Tallquist se servaient toujours de la même bobine d'induction en changeant seulement les capacités.

Nous avons poursuivi nos recherches directement. Nous commençons par préciser la notion de la conductibilité en question. Par rapport au circuit d'alimentation, on peut se représenter une bobine dont les spires sont mal isolées, comme étant constituée des deux parties distinctes : celle avec les spires isolées parfaitement, et d'une résistance ohmique sans induction, mise en parallèle avec la première.

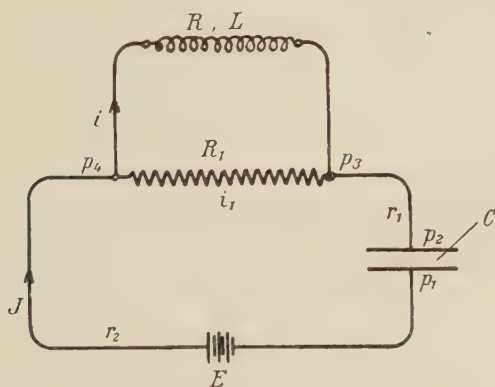


Fig. 9.

Dans ce cas, le circuit correspondant à la charge d'un condensateur sera représenté par le croquis ci-

joint N° 9, qui n'est qu'une modification du croquis donné plus haut.

Les équations correspondantes sont données par Tallquist (*loc. cit.*).

$$p_4 - p_3 = i R - L \frac{di}{dt}$$

$$p_4 - p_3 = i R_1$$

$$p_1 - p_4 + E = J r_2$$

$$p_3 - p_2 = J r_1$$

$$J = C \frac{d(p_2 - p_1)}{dt}$$

Mettons :

$$r_1 + r_2 = R_2 ; \quad p_2 - p_1 = P ; \quad p_3 - p_4 = P_1$$

Nous pourrions écrire alors :

$$P_1 + L \frac{di}{dt} + i R = 0 ; \quad P_1 + i_1 R_1 = 0$$

$$P - P_1 - E + J r_2 = 0$$

$$J = i + i_2 ; \quad J = C \frac{dP}{dt}$$

L'élimination étant faite, nous aurons l'équation différentielle

$$\begin{aligned} \frac{d^2P}{dt^2} + \left(\frac{RR_1 + RR_2 + R_1R_2}{R_1 + R_2} \cdot \frac{1}{L} + \frac{1}{R_1 + R_2} \cdot \frac{1}{C} \right) \frac{dP}{dt} \\ = \frac{R_1 + R}{R_1 + R_2} \left(\frac{E}{LC} - \frac{E}{LC} \right) \end{aligned}$$

Les intensités correspondant aux circuits dérivés sont données par

$$J = C \frac{dP}{dt}$$

$$i = \frac{R_1 + R_2}{R_1} C \frac{dP}{dt} = \frac{P - E}{R_1}$$

$$i_1 = - \frac{R_2}{R_1} C \frac{dP}{dt} = \frac{P - E}{R_1}$$

en mettant

$$2a = \frac{RR_1 + RR_2 + R_1R_2}{R_1 + R_2} \cdot \frac{1}{L} + \frac{1}{C(R_1 + R_2)}$$

$$b = \frac{R_1 + R_2}{R_1 + R_2} \cdot \frac{1}{LC}$$

nous arrivons à une équation différentielle identique à l'équation 6, p. 38.

$$\frac{d^2P}{dt^2} + 2a \frac{dP}{dt} + b(P - E) = 0$$

Pour simplifier la chose, supposons R_1 très grand, R_2 très petit et de même $C R^2$ petit par rapport à L .

Dans ce cas, nous pouvons admettre :

$$\left(\frac{R_2}{R}\right)^2 = 0 ; \left(\frac{R}{R_1}\right)^2 = 0 ; R_2^2 \frac{C}{L} = 0$$

$$\frac{1}{R_1^2} \cdot \frac{L}{C} = 0 \quad \frac{R_2}{R_1} = 0 \quad \frac{C R^2}{L} = 0$$

Nous aurons alors, dans le cas où :

$$b - a^2 > 0$$

une charge oscillante dont la période

$$T = 2\pi \sqrt{LC} \left(1 - \frac{4R}{r_1} \right)$$

et le décrement logarithmique

$$\alpha = a + bR$$

ou

$$a = \lg e^{\pi/2} \sqrt{\frac{L}{C}} \cdot \frac{1}{R_1}$$

$$b = \lg e^{\pi/2} \sqrt{\frac{C}{L}}.$$

Nous avons vérifié ces formules de la manière suivante :

Nous avons intercalé dans le circuit une résistance ohmique R_1 en dérivation avec la bobine L .

Pour calculer le décrement, on déterminait d'abord la capacité de nos condensateurs, en les comparant au condensateur normal à air de Lord Kelvin, dont la capacité = 0,002525 Mc Farad. La capacité de notre système de condensateurs mesurée ainsi a été de :

$$C = 0,03823 \text{ Mc Far.}$$

De même, à l'aide de comparaison à une normale de self-induction, nous avons déterminé, d'après M. le prof. Al. Wien, le coefficient L de self-induction de notre bobine :

$$L = 0.2929 \text{ Henry.}$$

La période des oscillations, sans la résistance parallèle :

$$T = 0.0006649 \text{ sec.}$$

Après avoir mis parallèlement à la bobine une résistance de 75006.8 Ohms, nous avons obtenu des résultats, reproduits dans le tableau ci-dessous.

$$T = 20^{\circ}\text{C.}$$

Nombre des éléments	La force électrom. en Volts	Déviation du galvanomètre
2	3.991	71.70
3	5.991	107.43
4	7.994	143.30
5	9.993	179.60
6	11.989	215.63
7	14.009	252.26
8	16.029	288.91
9	18.020	325.53

Le décrement des oscillations.

Numéro	Déviation du galvanomètre	Les amplitudes en Volts
1 ^{er} maximum	322.0	
1 ^{er} minimum	131.4	10.498
2 ^{me} maximum	281.3	8.280
4 ^{me} maximum	240.9	
4 ^{me} minimum	194.9	2.554
5 ^{me} maximum	231.1	2.017

$$\alpha = 0.0893.$$

La résistance du circuit :

$$R = 260.92 \text{ Ohms.}$$

$$R_1 = 75006.8 \text{ »}$$

$$\alpha \text{ calculé} = a + b R :$$

$$a = \lg e \pi_{/2} \sqrt{\frac{0.2929 \cdot 10^6}{0.03823}} \cdot \frac{1}{75006.8}$$

$$bR = \lg e \pi_2 \sqrt{\frac{0.03823}{0.2929 \cdot 10^6}} \cdot 260.92$$

$$\alpha = 0,0895.$$

La différence entre la valeur théorique du décrement et celle donnée par les observations est de 0.0002 ou 0.2 p. 100. Les résultats concordent donc d'une manière tout à fait satisfaisante et nous pouvons attribuer la différence entre les deux valeurs du décrement à la conductibilité mentionnée par Schiller et Tallquist, que nous avons fait intervenir artificiellement pour constater son rôle.



CURRICULUM VITÆ

Romain de Wybranowski, né le 21 août 1870, fils de Joseph de Wybranowski et de son épouse Sophie, née de Baczynska. J'appartiens à la religion catholique romaine.

J'ai reçu l'enseignement d'abord au Gymnase philologique de Lublin (jusqu'à la V^{me} classe inclusivement) et, après un an de préparation, je suis entré à l'école réale de Vinnitza, où j'ai reçu le certificat de maturité en 1891.

La même année, je suis entré dans la classe supplémentaire de l'école réale à Odessa et je l'ai quittée, avec le certificat, en 1892.

En 1893/4, j'ai été immatriculé à l'Ecole Polytechnique Impériale et Royale de Gratz, où je suis resté un semestre.

En 1896, j'ai été immatriculé à l'Ecole Polytechnique Royale de Berlin (Charlottenburg), où j'étudiai pendant deux semestres. En 1899 (semestre d'été), je me suis immatriculé à l'Université de Fribourg en Suisse (Faculté des Sciences) où j'ai poursuivi mes études jusqu'en 1904.

Pendant mes études, j'ai fréquenté les cours et les laboratoires de Messieurs les Professeurs,

A Fribourg : J. Brunhes, F. Daniëls, R. de Girard, J. de Kowalski, M. Lerch ;

A Gratz : Bank, v. Krones, Frhr. v. Lichtenfels, Pelz, Wittenbauer ;

A Berlin : Grübler, Hettner, Hertzer, Hörmann, Horn, Kammerer, Krüger, Rubens.

A tous mes très honorés Professeurs, j'exprime ici mes remerciements très sincères.

